数理解析研究所講究録
第754巻 1991年 284-292

境界付きNLCグラフ文法の性質

日本電気 山崎浩一 (Koichi Yamazaki)
東京電機大学 夜久竹夫 (Takeo Yaku)
東京電機大学 西野哲朗 (Tetsuro Nishino)

1 あらまし

NLCグラフ文法に対しては，JanssensとRozenbergにより排出グラフ言語(非終端記号を伴うグラフを含む)に関するポンプの補題が示されている．我々は対象を境界付きNLC(BNLC)グラフ文法に制限するとBNLCグラフ言語(終端記号だけからなる)に関して同様のポンプの補題が成り立つことを示す.

2 準備

本稿で用いられる定義，記法の詳細は文献[4,5]にゆずり，本稿では重要なものだけにとどめる．

[定義 1] Node-Labele-Controlledグラフ文法(NLC文法) Gとは，$G=(\Sigma,\Delta,P,conn,Z_{ax})$である．ここで$\Sigma$は空でないラベルの有限集合である．$\Delta$は$\Sigma$の空でない有限部分集合で終端ラベルの集合と呼ばれる．Pは組(d,Y)の有限集合で，$d\in\Sigma$, $Y\in G_\Sigma$を満たす. Pの元は生成規則と呼ばれる．$conn$はΣから2^Σへの関数で連結関数と呼ばれる．Z_{ax}は公理と呼ばれるΣの元でラベル付されたグラフである．
■

[定義 2] 境界付きNLCグラフ文法(BNLC文法) Gとは次の2つの条件(1),(2)を満たすNLC文法$G=(\Sigma,\Delta,P,conn,Z_{ax})$のことである．

(1) Z_{ax}は$\Sigma-\Delta$境界付きグラフである．

(2) 全ての$(d,Y)\in P$に対し，$d\in\Sigma-\Delta$, Yは$\Sigma-\Delta$境界付きグラフである． ■

文法Gの排出言語とは，グラフの集合$\{X\in G_\Sigma \mid Z_{ax}\Rightarrow_G^* X\}$のことをいい$S(G)$で表す. 文法$G$の言語とは，グラフの集合$\{X\in G_\Delta \mid Z_{ax}\Rightarrow_G^* X\}$のことをいい$L(G)$で表す.

$x\neq y$, $y\in \mathrm{hist}_D(x)$, $\mathrm{hist}_D(x)=(z_0,z_1,\cdots,z_m)$, $\mathrm{hist}_D(y)=(z_0,z_1,\cdots,z_n)$, $m<n$とする．このとき，列$(z_m,z_{m+1},\cdots,z_n)$を$\underline{\mathrm{hist}_D(x,y)}$で表す.

導出

$D: X_0 \Rightarrow_{(x_0,Y_1)} X_1 \Rightarrow_{(x_1,Y_2)} \cdots \Rightarrow_{(x_{n-1},Y_n)} X_n$

$D': X'_0 \Rightarrow_{(x'_0,Y'_1)} X'_1 \Rightarrow_{(x'_1,Y'_2)} \cdots \Rightarrow_{(x'_{n-1},Y'_n)} X'_n$

が同型とは，$\bigcup_{i=1}^n V_{X_i}$から$\bigcup_{i=1}^n V_{X'_i}$への同型写像hが存在し，

(1) 各$1\leq i\leq n$に対し，$h|_{V_{X_i}}$はX_iからX'_iへの同型写像で，

(2) 各$x\in V_D$に対して，$h(\mathrm{pred}_D(x))=\mathrm{pred}_D(h(x))$

が成り立つときをいう.

NLC排出グラフ言語のポンプの補題 (1980 Janssens,Rozenberg [4])

$G=(\Sigma,\Delta,P,conn,Z_{ax})$をNLC文法とし，$M\in S(G)$を$\sharp V_M > \sharp V_{Z_{ax}}\cdot[maxr(G)]^{\sharp\Sigma}$を満たすグラフとする．このとき各正整数$n$に対し以下の性質を満たすグラフ$M_n\in S(G)$が存在する．

性質

(1) $2\leq \sharp V_{M'}\leq [maxr(G)]^{\sharp\Sigma}$

(2) $\sharp(V_{M'\backslash\alpha}) \geq 1$

(3) $M\backslash\alpha \leq M_n$

(4) $M_n\backslash M''$は $(M')^{(n)}_{B,\alpha}$と同型で，

(5) 各 $3 \leq i \leq n$に対し，$\{(x,y) \mid x \in V_{M''}, y \in V_{M'\backslash\alpha}, \{x, h_i(y)\} \in M_n\} =$
$\{(x,y) \mid x \in V_{M''}, y \in V_{M'\backslash\alpha}, \{x, h_3(y)\} \in M_n\}$

ここでM', M''はMの誘導部分グラフで$M' = M\backslash M''$を満たす. αはM'の誘導部分グラフ. $B = (B_1, B_2)$は，$V'_M \times V'_M$の部分集合である$h_1, h_2, \cdots, h_n$はM'からそれぞれのM'のコピーへの同型写像である．

3 BNLCグラフ言語に対するポンプの補題

この節ではいくつかの必要な定義を行った後いくつかの補題を証明し，それらを用いてBNLC言語に対するポンプの補題を示す.

GをBNLC文法とし，

$D : X_0 \Rightarrow_{(x_0,Y_1)} X_1 \Rightarrow_{(x_1,Y_2)} \cdots \Rightarrow_{(x_{n-1},Y_n)} X_n$

をGにおける導出とする．導出Dにおいて，書き換えられた非終端節の集合$\{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}\}$を$C_D$で表す.

導出Dが(x_p, x_q)に関して反復可能な導出を含むとは，導出Dが節x_p, x_qに対して以下の2つの条件を満たすことをいう.

(1) $x_p, x_q \in C_D$ $(p < q)$ かつ

(2) $x_p \in \mathrm{hist}_D(x_q)$　かつ　$\varphi_D(x_p) = \varphi_D(x_q)$

列$(x_{i(0)}, x_{i(1)}, \cdots, x_{i(t-1)})$を$C_D$の部分集合$M = \{x_l \in C_D \mid x_q \in \mathrm{hist}_D(x_l)$か

つ $x_q \notin \mathrm{hist}_D(x_l)\}$ の元 x_l を添え字 l の小さい順に並べた列とする（便宜上 $\sharp M = t$ とする）. また, $i(t) = q$ とする. このとき

$$D^{orig} \ : \ X_0^{orig} \Rightarrow_{(x_{i(0)}, Y_{i(0)+1})} X_1^{orig} \ \cdots \ \Rightarrow_{(x_{i(t-1)}, Y_{i(t-1)+1})} X_t^{orig}$$

を導出 D の (x_p, x_q) に関しての反復可能な導出であるといい, $\mathrm{orig}(D, x_p, x_q)$ で表す.

ここで X_0^{orig} は節 $x_{i(0)}$ だけからなるグラフである.

任意の正整数 s に対して, D_j^{copy} $(1 \leq j \leq s)$ を $\mathrm{orig}(D, x_p, x_q)$ と同型で以下の条件(1)から(3)を満たす導出とする. また $\mathrm{orig}(D, x_p, x_q)$ から D_j^{copy} への同型写像を h_j とする.

各 $1 \leq j \leq s$ に対して

$$D_j^{copy} \ : \ X_0^j \Rightarrow_{(x^j_{i(0)}, Y^j_{i(0)+1})} X_1^j \ \cdots \ \Rightarrow_{(x^j_{i(t-1)}, Y^j_{i(t-1)+1})} X_t^j$$

(1) $h_j \ : \ V_{\mathrm{orig}(D, x_p, x_q)} \rightarrow V_{D_j^{copy}}, \ x_l \mapsto x_l^j$, ここで $l \in \{i(0), i(1), \cdots, i(t-1), i(t)\}$.

(2) $V_{\mathrm{orig}(D, x_p, x_q)} \cap V_{D_1^{copy}} = \{x_p = x^1_{i(0)}\}$,

各 $2 \leq j \leq s$ に対し, $V_{\mathrm{orig}(D, x_p, x_q)} \cap V_{D_j^{copy}} = \emptyset$

(3) 各 $1 \leq j \leq s-1$ に対し, $V_{D_j^{copy}} \cap V_{D_{j+1}^{copy}} = \{x^j_{i(t)}\}$ かつ $x^j_{i(t)} = x^{j+1}_{i(0)}$,

(4) $| i-j | \geq 2$ を満たすすべての $1 \leq i, j \leq s$ に対して, $V_{D_i^{copy}} \cap V_{D_j^{copy}} = \emptyset$.

このとき

$$\begin{aligned} D_s^{pump} : X_0^{pump} \ & \Rightarrow_{(x_0, Y_1)} X_1^{pump} & \cdots \ \Rightarrow_{(x_{q-1}, Y_q)} X_q^{pump} \\ & \Rightarrow_{(x^1_{i(0)}(=q), Y^1_{i(0)+1})} X_{q+1}^{pump} & \cdots \ \Rightarrow_{(x^1_{i(t-1)}, Y^1_{i(t-1)+1})} X_{q+t}^{pump} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow_{(x^2_{i(0)}(=q),Y^2_{i(0)+1})} X^{pump}_{q+t+1} \quad \cdots \quad \Rightarrow_{(x^2_{i(t-1)},Y^2_{i(t-1)+1})} X^{pump}_{q+2t}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow_{(x^s_{i(0)},Y^s_{i(0)+1})} X^{pump}_{q+(s-1)t+1} \quad \cdots \quad \Rightarrow_{(x^s_{i(t-1)},Y^s_{i(t-1)+1})} X^{pump}_{q+st}$$

$$\Rightarrow_{(x^s_{i(t)},Y_{q+1})} X^{pump}_{q+st+1}$$

$$\Rightarrow_{(x_{q+1},Y_{q+2})} X^{pump}_{q+2+st} \quad \cdots \quad \Rightarrow_{(x_{n-1},Y_n)} X^{pump}_{n+st}$$

を導出Dの(x_p,x_q)に関するs回ポンピング導出と呼び，pump(D,x_p,x_q,s)で表す.

写像h^{-1}を次のように定義する，すなわち，もし$x \in V_{D^{copy}_j}$のとき$h^{-1}(x)=h^{-1}_j(x)$.

このとき，以下の補題1から4が成り立つ.

[補題 1] もしグラフ$X_n \in G_\Delta$ならば$X^{orig}_t - x_q \in G_\Delta$である.

(証明) 略 ■

D^{copy}_j $(1 \leq j \leq k)$から構成される導出D^{iter}_kと集合B_1, B_2を以下のように定義したとき，次の補題2と3が成り立つ.

$$D^{iter}_k : X^{iter}_0 \quad \Rightarrow_{(x^1_{i(0)},Y^1_{i(0)+1})} X^{iter}_1 \quad \cdots \quad \Rightarrow_{(x^1_{i(t-1)},Y^1_{i(t-1)+1})} X^{iter}_t$$

$$\Rightarrow_{(x^2_{i(0)},Y^2_{i(0)+1})} X^{iter}_{t+1} \quad \cdots \quad \Rightarrow_{(x^2_{i(t-1)},Y^2_{i(t-1)+1})} X^{iter}_{2t}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow_{(x^k_{i(0)},Y^k_{i(0)+1})} X^{iter}_{(k-1)t+1} \quad \cdots \quad \Rightarrow_{(x^k_{i(t-1)},Y^k_{i(t-1)+1})} X^{iter}_{kt}$$

ここでX^{iter}_0は節$x^1_{i(0)}$だけからなるグラフである.

(1) $B_1 = \{(h^{-1}_1(x), h^{-1}_2(y)) \mid \{x,y\} \in E_{X^{iter}_{2t}}, x \in V_{X^{iter}_t}, y \notin V_{X^{iter}_t}, y \in V_{X^{iter}_{2t}}\ (y \neq x^2_{i(t)}), \{x, x^2_{i(t)}\} \notin E_{X^{iter}_{2t}}\}$

(2) $B_2 = \{(h_1^{-1}(x), h_2^{-1}(y)) \mid \{x,y\} \in E_{X_{2t}^{iter}}, x \in V_{X_t^{iter}}, y \notin V_{X_t^{iter}}, y \in V_{X_{2t}^{iter}}\ (y \neq x_{i(t)}^2), \{x, x_{i(t)}^2\} \in E_{X_{2t}^{iter}}\}$

[補題 2] 各正整数$2 \leq k$に対し，以下が成り立つ．すなわち$x \in V_{X_{(k-1)t}^{iter}}\ (x \neq x_{i(t)}^{k-1})$に対して，

(1) $x \notin V_{X_{(k-2)t}^{iter}}$で，ある節$y \in V_{X_t^{iter}}$が存在し$(h^{-1}(x), y) \in B_1$．または

(2) ある節$y \in V_{X_t^{iter}}$が存在し$(h^{-1}(x), y) \in B_2$

ならば$\{x, x_{i(0)}^k\} \in E_{X_{kt}^{iter}}$である．

(証明) 略 ■

[補題 3] 任意の正整数$2 \leq k$に対して，X_{kt}^{iter}と${X_t^{orig(k)}}_{B,x_{i(t)}}$は同型である．

(証明) kに関する帰納法を用いて証明する．

初期段階 $k=2$のとき，導出D_k^{iter}と集合B_1, B_2の定義より明らか．

帰納段階 $X_{(k-1)t}^{iter}$まで成り立つと仮定してX_{kt}^{iter}を考える．

${X_t^{orig(k)}}_{B,x_{i(t)}}$を構成する$X_t^{orig}$と同型な$k$個のグラフを$X_t^j\ (1 \leq j \leq k)$とする．すなわち，グラフ${X_t^{orig(k)}}_{B,x_{i(t)}}$と$X_{kt}^{iter}$は構成される方法が異なるだけで，同じ節から構成される．また写像g_iを$g_i : V_{X_t^{orig}} \to V_{X_t^j}$とする．このとき$h_j|_{V_{X_t^{orig}}} = g_i$．また，写像$g^{-1}$を次のように定義する，すなわち，もし$x \in V_{X_t^j}$のとき$g^{-1}(x) = g_j^{-1}(x)$．

仮定より$x \in V_{X_{(k-1)t}^{iter}}$，$y \in V_{X_{kt}^{iter}} - V_{X_{(k-1)t}^{iter}}$に関する辺についてのみを考えれば十分である．

逆も同様にして証明できるので，ここでは$\{x,y\} \in {X_t^{orig(k)}}_{B,x_{i(t)}}$ならば$\{x,y\} \in X_{kt}^{iter}$のみを示す．

$\mathrm{hist}_D(x^2_{i(0)}, h^2 \circ h^{-1}(y)) = (u_0, u_1, \cdots, u_m)$ とする．

$\{x, y\} \in X_t^{orig(k)}{}_{B,x_{i(t)}}$ より $(g^{-1}(x), g^{-1}(y)) \in B_1 \cup B_2$.

このとき以下の2つについてのみ考えれば十分である．

(1) $\{x, y\} \in \{\{g_{k-1}(u), g_k(v)\} \mid (u, v) \in B_1\}$

(2) $\{x, y\} \in \{\{g_i(u), g_k(v)\} \mid (u, v) \in B_2, 1 \leq i \leq k-1\}$

(1)の場合

B_1の定義より $x \notin V_{X^{iter}_{(k-2)t}}$. 従って補題2より $\{x, x^k_{i(0)}\} \in E_{X^{iter}_{kt}}$. また，$B_1$の定義より，$(g^{-1}_{k-1}(x), g^{-1}_k(y)) \in B_1$. これは，$\{h^{-1}(x), h_2 \circ h^{-1}(y)\} \in E_{X^{iter}_{2t}}$ を意味する．従って，各 $0 \leq j \leq m$ に対し $\varphi_{D^{iter}_k}(h^{-1}(x)) \in conn(\varphi_{D^{iter}_k}(u_j))$. よって，各 $0 \leq j \leq m$ に対し $\varphi_{D^{iter}_k}(x) \in conn(\varphi_{D^{iter}_k}(h_k \circ h^{-1}(u_j)))$. 結局 $\{x, y\} \in E_{X^{iter}_{kt}}$.

(2)の場合

補題2より $\{x, x^k_{i(0)}\} \in E_{X^{iter}_{kt}}$. 従って(1)の場合と同様に $\{x, y\} \in E_{X^{iter}_{kt}}$. ■

[補題 4] Dを導出，sを任意の正整数とし，D^pをDの(x_p, x_q)に関するs回ポンピング導出とする．また，XをDが導出するグラフとし，X^pをD^pが導出するグラフとする．このとき，もし $X \in G_\Delta$ ならば $X^p \in G_\Delta$である．

(証明) 略 ■

次に補題1から4を用いて，BNLC言語のポンプの補題を証明する．

[定理 1] **(BNLCグラフ言語のポンプの補題)** $G = (\Sigma, \Delta, P, conn, Z_{ax})$ をBNLC文法とし，$M \in L(G)$ を $\sharp V_M > \sharp V_{Z_{ax}} \cdot [maxr(G)]^{\sharp\Sigma}$ を満たすグラフとする．このとき各正整数sに対し以下の性質を満たすグラフ $M_s \in L(G)$ が存在する．

(1) $2 \leq \sharp V_{M'} \leq [maxr(G)]^{\sharp\Sigma}$

(2) $\sharp(V_{M'\backslash\alpha}) \geq 1$

(3) $M\backslash\alpha \leq M_s$

(4) $M_s\backslash M''$は $(M')^{(s)}_{B,\alpha}$と同型で，

(5) 各 $3 \leq i \leq s$ に対し，$\{(x,y) \mid x \in V_{M''}, y \in V_{M'\backslash\alpha}, \{x, h_i(y)\} \in M_s\} =$
$\{(x,y) \mid x \in V_{M''}, y \in V_{M'\backslash\alpha}, \{x, h_3(y)\} \in M_s\}$

ここで M', M''は Mの誘導部分グラフで $M' = M\backslash M''$を満たす. αは M'の誘導部分グラフ. $B = (B_1, B_2)$は，$V'_M \times V'_M$の部分集合である. $h_1, h_2, \cdots, h_s$は M'からそれぞれの M'のコピーへの同型写像である.

(証明) 導出

$$D : X_0 \Rightarrow_{(x_0,Y_1)} X_1 \Rightarrow_{(x_1,Y_2)} \cdots \Rightarrow_{(x_{n-1},Y_n)} X_n = M$$

をグラフ Mの導出とする．$\sharp V_M > \sharp V_{Z_{ax}} \cdot [maxr(G)]^{\sharp\Sigma}$ より $x_p \in \mathrm{hist}_D(x_q)$ かつ $\varphi_D(x_p) = \varphi_D(x_q)$ を満たす $x_p, x_q \in C_D$ $(p < q)$ が存在する．一般にこのような添え字の組 (p, q) は複数存在するが，ここでは上記の性質を満たし pが最大となるように p, qを選ぶ．このとき導出 D は (x_p, x_q) に関して反復可能な導出を含む．

任意の正整数 s に対し，D^{pump}_sを (x_p, x_q) に関する s回ポンピング導出とする．また，D^{pump}_sの結果を M_sとする．

M'を $\{x \in M \mid x_p \in \mathrm{hist}_D(x)\}$ を節の集合として持つ Mの誘導部分グラフとし，$M'' = M\backslash M'$とする．また αを $\{x \in M \mid x_q \in \mathrm{hist}_D(x)\}$ を節の集合として持つ Mの誘導部分グラフとする

p,qの選び方から(1)から(3)は明か．補題3より$M_s \backslash M''$と$(M')^{(s)}_{B,\alpha}$は同型．(5)も補題4を用いることにより補題3と同様にして証明できる． ■

4 むすび

我々は，BNLC文法を対象とすることにより，BNLCグラフ言語に対するポンプの補題を得た．

5 参考文献

[1] Claus, V.;Ehrig,H.;Rozenberg,G.,Graph-Grammars and Thier Application to Computer Science and Biology. Springer, 1979, Lect. Notes Comp. Sci. 73

[2] Ehrig,H.;Nagle,M.;Rozenberg,G.,Graph-Grammars and Thier Application to Computer Science. Springer, 1983, Lect. Notes Comp. Sci. 153

[3] Ehrig,H.;Nagle,M.;Rozenberg,G.;Rosenfeld,A.,Graph-Grammars and Thier Application to Computer Science. Springer, 1987, Lect. Notes Comp. Sci. 291

[4] Janssens,D.,Rozenberg,G.(1980),On the Structure of Node-Label-Controlled Graph Languages,Inf. Sci. 20,191-216.

[5] Rozenberg,G.,Welzl,E.(1986),Boundary NLC Graph Grammars = Basic Definition, Normal Normal Forms, and Complexity, Information and Control,69,136-167.

[6] Rozenberg,G.,Welzl,E.(1986),Graph Theoretic Closure Properties of the Family of Boundary NLC Graph Language,Acta Informatica,23,289-309.

[8] Harary,F.(1969),"Graph Theory," Addison-Weseley,Reading,Mass.